Lista de exercícios 03: Distribuição Normal Multivariada

`Data de entrega: 05 de outubro de 2026`

---

1) Suponha que $\mathbf{x} \sim N_3(\mu, \Sigma)$, onde

$$\mu = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Encontre a distribuição de $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$
b) Encontre a distribuição conjunta de $z_1 = x_1 + x_2 + x_3$ e $z_2 = x_1 - x_2 + 2x_3$
c) Encontre a distribuição marginal de x_2
d) Encontre a distribuição de $[x_1 \;\; x_3]^t$
e) Encontre a distribuição conjunta de x_1, x_3 e $3(x_1 + x_2)$

---

2) Considere uma população normal bivariada com $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$, $\sigma_{11} = 2$, $\sigma_{22} = 1$ e $\rho_{12} = 0,5$.

a) Escreva a função densidade normal bivariada correspondente.
b) Escreva a distância generalizada quadrática de Mahalanobis $(\mathbf{x}-\mu)^t\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)$ em função de x_1 e x_2.

---

3) Suponha que $\mathbf{x} \sim N_3(\mu, \Sigma)$, onde

$$\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Encontre a distribuição de $z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$
b) Encontre a distribuição de $w = 2x_1$
c) Encontre a distribuição conjunta de $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$

---

4) Suponha que $\mathbf{x} \sim N_3(\mu, \Sigma)$, com

$$\mu = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifique se as seguintes variáveis são independentes. JUSTIFIQUE!

a) X_1 e X_2
b) X_2 e X_3
c) (X_1, X_2) e X_3
d) $\dfrac{X_1 + X_2}{2}$ e X_3
e) X_2 e $X_2 - \dfrac{5}{2}X_1 - X_3$

---

5) Seja $\mathbf{x} \sim N_3(\mu, \Sigma)$, com

$$\mu = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 25 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Determine a distribuição condicional de X_1 dado $\mathbf{x_2} = [4 \;\; 4]^t$.

---

6) Seja o vetor $\mathbf{x}$ com distribuição normal $N_3(\mu, \Sigma)$, sendo

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine as distribuições marginal de X_1 e condicional de X_1 dado $\mathbf{x_2} = [X_2 \ X_3]^t$. O que podemos dizer a respeito dessas distribuições? Explique a razão desse fato.