Lista de exercícios 02: Introdução à Estatística Multivariada

`Data de entrega: 17 de novembro de 2025`

---

1) Se $z_i = ay_i$, para $i = 1 \cdots n$, mostre que $\overline{z} = a\overline{y}$.

---

2) Se $z_i = ay_i$, para $i = 1 \cdots n$, mostre que $s_z^2 = a^2 s^2$.

---

3) A tabela abaixo fornece os dados de três variáveis (g/kg) medidas em 10 locais diferentes no Estado de Minas Gerais. As variáveis são:

$$X_1 = \text{cálcio disponível no solo;}$$
$$X_2 = \text{potássio disponível no solo;}$$
$$X_3 = \text{fósforo disponível no solo.}$$

Locais	X_1	X_2	X_3
1	35	12	2.4
2	35	13	2.1
3	40	14	1.9
4	25	11	1.8
5	26	15	2.3
6	32	11	2.5
7	21	10	3.0

Locais	X_1	X_2	X_3
8	30	5	1.0
9	33	15	1.1
10	27	16	2.6

a) Encontre o vetor de médias amostrais $\overline{\mathbf{x}}$.
b) Calcule a matriz de covariâncias amostrais S.
c) Obtenha a matriz de correlações amostrais R.

---

4) Usando os dados apresentados na Tabela acima, calcule:

a) A variância generalizada amostral.
b) A variância total amostral.

---

5) Usando os dados apresentados na Tabela do exercício 3, defina $Z = 3X_1 - X_2 + 2X_3$ e calcule $\overline{z}$ e s_Z^2

---

6) Usando os dados apresentados na Tabela do exercício 3, defina $W = -2X_1 + 3X_2 + X_3$ e calcule:

a) $\overline{w}$ e s_W^2.
b) $\overline{\mathbf{y}}$ e S_y se $y = \begin{bmatrix} Z & W \end{bmatrix}$.
c) Encontre a matriz R_y.

---

7) Ainda utilizando os dados da Tabela do exercício 3, defina as seguintes combinações lineares das variáveis:

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ Z_2 &= 2X_1 - 3X_2 + 2X_3 \\ Z_3 &= -X_1 - 2X_2 - 3X_3 \end{aligned}$$

a) Encontre $\overline{\mathbf{z}}$ e S_z.
b) Através de S_z, encontre R_z.

8) Considere as amostras com 8 observações e 3 variáveis apresentadas a seguir:

	1	2	3	4	5	6	7	8
X_1	3	5	6	4	8	9	6	7
X_2	6	11	11	9	15	16	10	12
X_3	14	9	9	13	2	2	9	5

a) Calcule $\overline{\mathbf{x}}, S, R$.

b) Calcule as distâncias euclidiana, euclidiana padronizada e Mahalanobis de um ponto $P = (X_1, X_2, X_3) = (5, 12, 8)$ em relação ao a $\overline{\mathbf{x}}$.

---

9) Sejam dois vetores aleatórios $\mathbf{x} = [2 \;\; 3]^t$ e $\mathbf{y} = [2 \;\; 1]^t$ e considere a matriz de covariâncias amostral igual a $S = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$. Determine:

a) A distância euclidiana entre os dois vetores.

b) A distância generalizada de Karl Pearson.

c) A distância generalizada de Mahalanobis.

---

10) Obtenha as variâncias generalizada e total da matriz de covariâncias amostral apresentada a seguir. Determine a matriz de correlações e as variâncias generalizada e total correspondentes.

$$S = \begin{bmatrix} 32 & 12 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$$