Lista de exercícios 01: Revisão de Álgebra Linear

`Data de entrega: 31 de outubro de 2025`

---

1) Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Encontre $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
b) Encontre $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$ e $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$.
c) Calcule $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t$ e verifique que a matriz resultante é igual a $\mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$.
d) Mostre que $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$.

---

2) Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Encontre $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$.
b) Encontre $|\mathbf{AB}|$ e verifique se $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.
c) Calcule $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e $\mathbf{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.
d) Calcule $\mathbf{tr}(\mathbf{A})$ e $\mathbf{tr}(\mathbf{B})$ e verifique se $\mathbf{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{tr}(\mathbf{A}) + \mathbf{tr}(\mathbf{B})$.
e) Encontre $(\mathbf{AB})^{\mathbf{t}}$ e verifique que $(\mathbf{AB})^{\mathbf{t}} = \mathbf{B}^{\mathbf{t}}\mathbf{A}^{\mathbf{t}}$.

---

3) Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encontre $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$.
b) Calcule $\mathbf{tr}(\mathbf{AB})$ e $\mathbf{tr}(\mathbf{BA})$ e verifique se são iguais.

---

4) Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Mostre que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$.
b) Encontre um vetor $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = 0$.
c) Mostre que $|\mathbf{A}| = 0$.

---

5) Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Encontre o que se pede:

a) $\mathbf{Bx}$
b) $\mathbf{y^t B}$
c) $\mathbf{x^t A x}$
d) $\mathbf{xAy}$.
e) $\mathbf{xy^t}$.
f) $(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\mathbf{t}}\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$

---

6) Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Encontre **AD**, **DA** e **DAD**

---

7) Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Encontre **AB** e **CB**. Elas são iguais?
b) Encontre o posto das matrizes **A**, **B** e **C**.

---

8) Verifique se as matrizes abaixo são ortogonais:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

---

9) Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Mostre que **A** é simétrica.
b) Obtenha os autovalores e autovetores da matriz **A**.
c) Mostre que os autovetores são ortogonais.
d) Escreva a decomposição espectral de **A**.
e) Obtenha $\mathbf{A^{-1}}$, seus autovalores e autovetores e a decomposição espectral. Relacione com a decomposição espectral de **A**.
f) Mostre que o determinante de $\mathbf{A^{-1}}$ é o inverso do determinante de **A**.
g) Mostre que o determinante de **A** é o produto dos autovalores.
h) Encontre a forma quadrática da matriz **A** e classifique-a.
i) Mostre que $(\mathbf{A^t})^{-1} = (\mathbf{A^{-1}})^{\mathbf{t}}$.

---

10) Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 6 & 9 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Encontre a decomposição espectral de $\mathbf{A}$.
b) Encontre a decomposição espectral de $\mathbf{A^2}$ e mostre que a matriz diagonal de autovalores é igual ao quadrado da matriz $\mathbf{D}$ encontrada na parte a.
c) Encontre a decomposição espectral de $\mathbf{A^{-1}}$ e mostre que a matriz diagonal de autovalores é igual à inversa da matriz $\mathbf{D}$ encontrada na parte a.

---

11) Dados os vetores $\mathbf{x^t} = [1 \quad 3]$ e $\mathbf{y^t} = [2 \quad -5]$:

a) Obtenha a norma de $\mathbf{x}$ e de $\mathbf{y}$.
b) Obtenha o ângulo e a distância entre esses vetores.
c) Obtenha a distância entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ na métrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Obtenha a distância entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ na métrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

---

12) Uma forma quadrática $\mathbf{x^t A x}$ é dita ser positiva definida se a matriz $\mathbf{A}$ é positiva definida. A forma quadrática $3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$ é positiva definida?